Límite

Indeterminaciones:

Asíntotas

Vertical:

**Diversificación:**

Horizontal:

Oblicua:

**Cálculo de :**

**Cálculo de :**

Continuidad

Condiciones para que una función sea continua en un punto:

1. Que exista límite en el punto y sea finito

Si no se cumple con alguna de estas condiciones, se dice que la función es discontinua en el punto .

Clasificación de discontinuidades:

Teorema de Bolzano:

Si una función es continua en el intervalo y toma, en los extremos del mismo, valores y de signos opuestos, entonces se anula por lo menos en un punto interior al intervalo .

Teorema del Valor Intermedio:

Sea una función continua en y un valor intermedio entre y , siendo , entonces existe un punto interior a /

Teoremas de Weierstrass:

1. Si una función es continua en un intervalo cerrado entonces está acotada en dicho intervalo. Esto significa que el conjunto imagen tiene ínfimo y supremo.
2. Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza en él un valor máximo absoluto que no es superado por ningún otro valor, y un mínimo absoluto que no supera a ningún otro.

Derivadas

Relación entre la derivabilidad y la continuidad:

no es continua no es derivable

Derivada de una función en un punto:

Derivada del producto de dos funciones:

Derivada del cociente de dos funciones:

Ecuación de la recta tangente en el punto :

Ecuación de la recta normal en el punto :

Teorema de Rolle:

Si una función es continua en el intervalo y derivable en el , y entonces existe un punto interior en el cual

Teorema del valor intermedio de Lagrange:

Si es una función continua en el intervalo y derivable en el intervalo entonces existe un punto en el que se verifica que

Teorema de Cuchy:

Si y son funciones continuas en el intervalo y derivables en el y entonces tal que

Teorema de L’Hopital:

Si y son funciones que cumples con las hipótesis del teorema de Cauchy en un ,

Análisis de Funciones

Crecimiento:

**Función estrictamente creciente en un punto:**

Una función es estrictamente creciente en si:

**Función estrictamente decreciente en un punto:**

Una función es estrictamente decreciente en si:

Criterio de la 1° Derivada:

Si la derivada 1° de una función en un punto es positiva, entonces la función es estrictamente creciente en el punto . Análogamente se puede demostrar que si la derivada primera es negativa, la función es estrictamente decreciente en el punto

Crecimiento en un intervalo:

Una función es estrictamente creciente (o decreciente) en un intervalo si lo es en todos los puntos interiores al mismo.

Extremos Absolutos

**Máximo Absoluto**

Una función definida en un conjunto alcanza un máximo absoluto en si el valor que toma la función en ese punto no es superado por ningún otro valor que toma la función en el conjunto .

**Mínimo Absoluto**

Una función definida en un conjunto alcanza un mínimo absoluto en si el valor que toma la función en ese punto no supera a ningún otro valor que toma la función en el conjunto .

Extremos Relativos o Locales

**Máximo Relativo**

Una función definida en un conjunto , alcanza un máximo relativo en si el valor que toma la función en ese punto no es superado por ningún otro valor que toma la función en un entorno del punto .

**Mínimo Relativo**

Una función definida en un conjunto , alcanza un mínimo relativo en si el valor que toma la función en ese punto no supera a ningún otro valor que toma la función en un entorno de .

Cálculo de Extremos Relativos

*Para funciones derivables:*

**Condición necesaria**

Si una función derivable alcanza un extremo relativo en , la derivada primera en ese punto se anula. Eso se debe a que en ese punto la curva no es creciente ni decreciente, por lo tanto la derivada primera no puede ser positiva ni negativa. Esta condición es necesaria pero no suficiente. Debemos analizar las condiciones suficientes.

**Condición suficiente**

1. Criterio del signo de la derivada primera: Si al atravesar un punto que cumple con la condición necesaria, la derivada primera pasa de ser positiva a negativa, en el punto hay un máximo relativo, si pasa de ser negativa a positiva, hay un mínimo relativo. Si no cambia de signo no hay extremos.
2. Criterio del signo de la derivada segunda o condición suficiente: Si tiene derivada finita en , y , entonces la función alcanza un máximo relativo en .

*Para funciones NO derivables:*

Si la función no es derivable en , entonces debemos aplicar el criterio A), es decir, analizar el signo de la derivada primera a izquierda y a derecha de y ver si éste cambia.

Puntos Críticos

Que un punto sea crítico no significa que deba alcanzar un extremo necesariamente, simplemente quiere decir que puede haber en él un extremo. Luego hay que verificar si hay o no extremo.   
  
**TIPO 1:** es interior al intervalo y =0  
**TIPO 2:** , es interior al intervalo y no está definida  
**TIPO 3:** es uno de los extremos del intervalo  
  
*En cada caso debe hacerse el siguiente análisis:***TIPO 1:** Se debe analizar el signo de (si no se anula) para determinar si hay extremo o no y que tipo de extremo es o el signo de a izquierda y a derecha  
**TIPO 2:** Se debe analizar el crecimiento a izquierda y a derecha para determinar si hay o no extremo y que tipo de extremo es.  
**TIPO 3:** Se calcula el valor que toma la función en los puntos interiores.

Concavidad de una curva

**Curva cóncava en un punto**

La curva correspondiente a una función derivable es cóncava en sí y solo sí existe un entorno reducido de donde la curva está por sobre la recta tangente a la curva en el punto. Se dice que la función es cóncava en .

**Curva convexa en un punto**

La curva correspondiente a una función derivable es convexa en sí y solo sí existe un entorno reducido de donde la curva está por dejo de la recta tangente a la curva en el punto. Se dice que la curva es convexa en .

**Criterio de la 2° derivada**

Si la derivada 2° es positiva en , entonces es cóncava en el punto . Si la derivada 2° es negativa en , entonces es convexa en el punto .

**Concavidad en un intervalo**

Una curva es cóncava (o convexa) en un intervalo si lo es en todos los puntos interiores del mismo.

Puntos de Inflexión

*Para funciones derivables:*

**Condición necesaria**

Si existe la derivada segunda de la función en , ésta debe valer . Esto se debe a que en ese punto la curva no es ni cóncava ni convexa y por lo tanto su derivada segunda no puede ser ni positiva ni negativa. Esta condición es necesaria pero no suficiente. Debemos analizar condiciones suficientes.

**Condición suficiente**

1. Criterio del signo de la derivada segunda: Si al atravesar el punto la derivada segunda cambia de signo, en el punto hay un punto de inflexión. Si no cambia de signo no hay punto de inflexión.
2. Criterio del signo de la derivada tercera o condición suficiente: Si en , y , es punto de inflexión de .

*Para funciones NO derivables:*

Si la función no es derivable en , entonces debemos aplicar el criterio A), es decir, analizar el signo de la derivada segunda a izquierda y a derecha de y ver si éste cambia.

Existencia de puntos de inflexión

**TIPO 1:** .  
**TIPO 2:** y no está definida.

Una vez detectados estos puntos debemos verificar si son o no puntos de inflexión.

**TIPO 1:** Utilizamos los criterios A o B como condición suficiente.  
**TIPO 2:** Utilizamos el criterio A como condición suficiente.

Formula de Taylor y Mac Laurin

Se trata de aproximar una función derivable mediante un polinomio particularmente elegido en un entorno de un punto y precisar el error o aproximación que se comete al reemplazar el valor de la función en un punto cualquiera de su dominio próximo a por el valor en el mismo punto del polinomio seleccionado.

**Error**

*Polinomio de Taylor*

Sea una función derivable hasta el orden en un , entonces . Utilizando el polinomio de Taylor para una función con sucesivas derivadas en se obtiene:

El polinomio se aproxima a la función en un entorno de . Si queremos calcular el valor de la función en un punto próximo a , calculando su valor en el polinomio en lugar de hacerlo en la función, su aproximación depende de la proximidad que tengan y , y de la cantidad de términos del polinomio de Taylor que se consideren. Las derivadas de coinciden en con las derivadas de .

*Término Complementario*

Falta estimar el error que se comete al utilizar el polinomio en lugar de la función. , es decir que el resto o término complementario es la diferencia que hay entre el valor real de la función y el que se obtiene con el polinomio.

Para una función determinada, el valor del resto depende de la proximidad entre y , y de la cantidad de términos que se desarrollen del polinomio. Lagrange fue el que determinó el valor del término complementario. Determinó que el resto es:

Finalmente, sumando el término complementario al polinomio de Taylor se obtiene la fórmula de Taylor:

*Fórmula de Mac Laurin*

Es un caso particular de la fórmula de Taylor, cuando . El polinomio queda expresado en potencias de x.

*Verificación de la condición para la existencia de extremos relativos*

Desarrollamos la fórmula de Taylor hasta 2° orden en un entorno de un punto crítico :

Si tenemos en cuenta que en el punto crítico la derivada primera se anula y despreciando el término complementario queda: , de donde surge que el signo de depende del signo de . Si es positiva, la diferencia entre y es positiva y por lo tanto en hay un mínimo relativo. Si es negativa, la diferencia entre y es negativa y por lo tanto en hay un máximo relativo.

*Verificación de la concavidad y convexidad*

Si desarrollamos la fórmula de Taylor hasta 2° orden:

Despejando surge que: .  
En el primer miembro tenemos la diferencia entre la función y la recta tangente en .  
Si despreciamos el término complementario, vemos que el signo de esa diferencia depende del signo de . Si es positiva, la diferencia entre y la recta tangente es positiva y por lo tanto en la curva es cóncava. Si es negativa, la diferencia entre y la recta tangente es negativa y por lo tanto la curva es convexa.

Integral Indefinida

**Concepto**

Hasta ahora hemos visto el problema de dada una función obtener la función derivada. Muchas veces es necesario plantear el problema inverso, es decir, encontrar una función conocida su derivada. Esta función recibe el nombre de primitiva.

Por ejemplo, es una primitiva de , porque la derivada de es .

**Definición**

Una primitiva de una función continua es una función si se verifica que es derivable y . Las primitivas se simbolizan de la siguiente manera: , por lo tanto es equivalente decir que una primitiva de es una función si . Cada función admite infinitas primitivas, que difieren en una constante.

**Teorema:** Si y son funciones primitivas de , entonces difieren en una constante.

**Propiedades de la integral indefinida**  
a)   
b)

**Integrales inmediatas**

Son aquellas que se pueden obtener directamente. La forma de justificar que una función es una primitiva o integral indefinida de otra es derivándola. Si al derivarla se obtiene la función original, entonces quedará justificado que dicha función es la primitiva de la función dada. Para trabajar con integrales inmediatas es necesario utilizar la tabla de integrales inmediatas.

*Métodos de Integración*

**Método de Sustitución**

Este método consiste, como su nombre lo indica, en transformar una integral no inmediata en otra inmediata a través de una sustitución de variables.

**Método de integración por partes**

Si , donde y son funciones de derivables. Si integramos a ambos miembros y despejamos, queda:

El objetivo es transformar una integral no inmediata en resta de un producto de funciones y una integral que debe ser inmediata o por lo menos más sencilla que la original. Parte del éxito en la resolución de este tipo de integrales está en saber elegir.

**Método de integración por descomposición en fracciones simples**

Este método se utiliza para integrales del tipo , donde y son polinomios.  
Vamos a suponer, por ahora, que las expresiones racionales son propias (grado de < grado ). Después veremos qué ocurre si no fuese así. Se presentan los siguientes casos que tienen que ver con el tipo de raíces que tiene el polinomio .  
El método consiste en descomponer una expresión racional en suma de fracciones simples, ya que una fracción simple es fácilmente integrable. Primero efectuamos la descomposición y después integramos.

**Raíces de son reales y distintas**

Donde son las raíces del denominador y es el coeficiente principal de . Hay tantas fracciones simples como raíces tiene el denominador.

**Raíces de reales múltiples**

En este caso cada raíz múltiple da origen a tantas fracciones simples como su orden de multiplicidad. Los exponentes de los denominadores son decrecientes desde el orden de multiplicidad hasta 1. Por ejemplo si tiene raíces , y distinta de las anteriores queda:

**Raíces de complejas simples**

Si admite raíces complejas simples, queda en el denominador el factor cuadrático sin factorear y como numerador del mismo corresponde un polinomio de grado 1.

**Raíces de complejas múltiples**

Se sigue el mismo criterio que para las raíces reales múltiples. Cada factor con raíces complejas que no se descompone da origen a tantas fracciones simples como el exponente al que está elevado. Los numeradores siguen siendo polinomios de grado 1 como en el caso de las raíces complejas simples.

**Caso de expresiones racionales impropias**

Si , primero se debe efectuar la división de los polinomios. La integral queda como suma de la integral de un polinomio (cociente de la división) más la integral de una expresión racional propia que se resuelve como ya vimos.

Integral Definida

**Concepto**

Se plantea el problema de calcular el área debajo de la gráfica correspondiente a una función que por el momento consideramos continua y positiva en el intervalo . A los efectos de calcular el área efectuamos una partición del intervalo en un número finito de subintervalos, cada uno de amplitud y consideramos en cada subintervalo con los rectángulos con base en dichos subintervalos y alturas y respectivamente, donde:

Si consideramos la función acotada y la partición . Se define como suma superior e inferior para correspondiente a la partición :

Que aproximan por exceso y por defecto al área buscada. En estas condiciones es:

**Propiedades**

1. Si es continua en , entonces es integrable sobre dicho intervalo.
2. Si está acotada y es continua salvo en un número finito de puntos, entonces es integrable en .
3. Si es integrable en , entonces es integrable sobre dicho intervalo.
4. Si es integrable en , entonces es integrable sobre dicho intervalo.

**Otra forma**

Dividimos el intervalo en subintervalos, cada uno de amplitud y consideramos de cada subintervalo un punto interior al cual le corresponde un valor de la función . El área de cada rectángulo se obtiene multiplicando cada por cada . La suma de las áreas de los rectángulos da un valor aproximado del área bajo la curva, con entre y .

Si la partición se hace más fina, esta sumatoria se aproxima cada vez más al área real.

Se define como integral definida entre y al límite, cunado cada , de la suma de los productos entre los y los .

**Nota:** si es negativa, la integral definida es negativa y por lo tanto no mide el área, el valor de ésta es el valor absoluto de la integral definida o

**Propiedades de la integral definida**

1. Propiedad aditiva:
2. Los factores se pueden extraer de la integral:
3. La integral definida de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales definidas:
4. Si se permutan los extremos de integración, se obtiene el número opuesto:  
    y
5. Si es integrable sobre y entonces:

Esta propiedad significa que para el caso de una función positiva en , el área debajo de la curva está comprendida entre las áreas de dos rectángulos, de altura , y el de altura .

1. A) Si es impar, entonces

B) Si es par, entonces

*Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral*

Si es continua en un intervalo entonces .

se denomina valor medio de en .

El teorema afirma que la integral definida de una función continua en un intervalo es igual a la amplitud del intervalo por un valor entre y .

**Demostración**

Sean y los extremos absolutos de la función en . Como una función continua es integrable, por propiedad 6:

Por ser , dividiendo por : .

es un número entre y , (por el teorema del valor intermedio para intermedio para funciones continuas), entonces

**Interpretación geométrica**

Si es una función continua y positiva, el área es igual al área de un rectángulo cuya base es y cuya altura es .

Función integral

Consideremos en la integral definida el límite superior variable . La integral es función del límite superior del intervalo.

se llama función integral (si es no negativa, se denomina también función área) y su valor depende del extremo superior .

y

*Teorema Fundamental del Cálculo Integral*

Relaciona la integral definida con la integral indefinida.

Si es continua en , la función integral es derivable y su derivada en cualquier punto es . Esto significa que la derivada de la función integral es igual al valor que toma la función integrando en el extremo :

Propiedades

1. Sea la función , por ser una función compuesta, su derivada es .

Regla de Barrow

Si es continua en y es una primitiva de , entonces:

*Área Entre Dos Curvas*

Se plantea el cálculo del área de una región plana limitada por dos curvas. El área se puede calcular como resta de dos integrales definidas. , donde es la curva que limita el recinto superiormente, y , donde es la curva que limita inferiormente. De donde se deduce que , y son las abscisas de los puntos de intersección de las curvas.

*Integración sobre el Eje*

Si en lugar de plantear la región plana limitada por las gráficas de dos funciones del tipo , la planteamos como limitada por las gráficas de dos funciones del tipo , obtenemos la siguiente integral definida:

Si , entonces la integral presenta el área de la región plana limitada por ambas gráficas.

*Integral Definida en Coordenadas Paramétricas*

Si una función está definida en forma paramétrica vemos como se calcula la integral definida. Si tenemos en cuenta que y que , reemplazando en la fórmula de la integral definida para coordenadas cartesianas queda: , donde y son los valores de correspondientes a los valores de y .

Integrales Impropias

Hasta ahora vimos el caso del cálculo de una integral definida en el que la función es siempre continua en el intervalo o bien, si es discontinua, está acotada en ese intervalo y el intervalo de integración está acotado. Si alguna de estas condiciones no se cumple tenemos las integrales impropias.

*Impropias de 1° especie*

El intervalo de integración no está acotado, al menos uno de los límites de integración es infinito.

1. es continua en

Se toma la integral entre y , valores finitos, y luego se hace tender a infinito.  
Si es finito entonces la integral es y converge a .  
Si es infinito entonces la integral es   
Si el límite no existe, la integral es .

1. es continua en

Se utiliza el mismo criterio que en a)

1. es continua en y Se toma un punto interior y se descompone la integral en dos integrales, una del tipo a) y otra del tipo b)

*Integral Impropia de 2° especie*

La función no está acotada en , presenta una discontinuidad esencial

1. La discontinuidad está en el extremo superior

Se toma un punto anterior a , , en el cual la función es continua. Se calcula la integra entre y y luego se toma el límite de tendiendo a de la integral.

1. La discontinuidad está en el extremo inferior

Se toma un punto posterior a , , en el cual la función es continua. Se calcula la integral entre y , luego se toma el límite de teniendo a de la integral.

1. La discontinuidad está en un punto interior a

Se descompone en dos integrales, una del tipo a) y otra del tipo b):

1. La discontinuidad está en ambos extremos

Se toma un punto interior a y se descompone en una del tipo a) y otra del tipo b):

*Integral Impropia de 3° especie o tipo mixto*

Se presentan simultáneamente los casos de 1° especie y 2° especie. Se desdobla en dos integrales.

**Ejemplo**

*Criterio de comparación*

1. y es convergente, entonces también converge.
2. y es divergente, entonces también diverge.

Sucesiones

Una sucesión infinita es una función cuyo dominio son los números naturales y cuya imagen es un subconjunto de . Consideramos sucesiones de números reales:

Los son los términos de la sucesión. En particular es el término n-simo. La sucesión se indica habitualmente como o

*Igualdad*

Dos sucesiones son iguales si sus términos coinciden ordenadamente.   
Es decir

*Sucesiones Acotadas*

Una sucesión está acotada si tiene cota superior e inferior.

es una cota superior de la sucesión   
 es una cota inferior de la sucesión

**Extremo Inferior o Ínfimo:** Es la mayor de las cotas inferiores.  
**Extremo Superior o Supremo:** Es la menor de las cotas superiores.